

**DIVISIBILIDAD**  
**EJERCICIOS RESUELTOS**

**Múltiplos de un número natural**

1.- Calcula los cinco primeros múltiplos de:

a) 10

$$10 \rightarrow 0, 10, 20, 30, 40$$

b) 25

$$25 \rightarrow 0, 25, 50, 75, 100$$

c) 8

$$8 \rightarrow 0, 8, 16, 24, 32$$

d) 11

$$11 \rightarrow 0, 11, 22, 33, 44$$

e) 222

$$222 \rightarrow 0, 222, 444, 666, 888$$

f) 43

$$43 \rightarrow 0, 43, 86, 129, 172$$

2.- Encuentra:

a) Tres múltiplos de 11 comprendidos entre 27 y 90.

$$11 \rightarrow 27 < \overset{\cdot 3}{33}, \overset{\cdot 4}{44}, \overset{\cdot 5}{55}, \overset{\cdot 6}{66}, \overset{\cdot 7}{77}, \overset{\cdot 8}{88} < 90$$

b) El primer múltiplo de 17 mayor que 500.

$$17 \rightarrow \overset{\cdot 29}{493} < 500 < \overset{\cdot 30}{510}$$

c) Tres múltiplos de 9 mayores que 100.

$$9 \rightarrow 100 < \overset{\cdot 12}{108}, \overset{\cdot 13}{117}, \overset{\cdot 14}{126} \dots$$

d) Todos los múltiplos de 7 que estén entre 100 y 150.

$$7 \rightarrow 100 < \overset{\cdot 15}{105}, \overset{\cdot 16}{112}, \overset{\cdot 17}{119}, \overset{\cdot 18}{126}, \overset{\cdot 19}{133}, \overset{\cdot 20}{140}, \overset{\cdot 21}{147} < 150$$

e) Cinco múltiplos de 13 mayores que 1.000, pero menores que 1.100.

$$13 \rightarrow 1.000 < 1.001, 1.104, 1027, 1.040, 1.053, 1.066, 1.079, 1.092 < 1.100$$

3.- Comprueba si:

a) Los números 556, 115, 104 y 315 son múltiplos de 4.

$$556 : 4 = 139 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 556 = 4$$

$$115 : 4 = 28,75 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 115 \neq 4$$

$$104 : 4 = 26 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 104 = 4$$

$$315 : 4 = 78,75 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 315 \neq 4$$

b) El número 192 es múltiplo de los números 5, 6, 7 y 8.

$$192 : 5 = 38,4 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 192 \neq 5$$

$$192 : 6 = 32 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 192 = 6$$

$$192 : 7 = 27,43 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 192 \neq 7$$

$$192 : 8 = 24 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 192 = 8$$

### Divisores de un número natural

4.- Comprueba si:

a) Los números 12 y 18 son divisores de 144.

$$144 : 12 = 12 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 12 | 144$$

$$144 : 18 = 8 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 18 | 144$$

b) El número 91 tiene como divisores los números 3, 7, 11 y 13.

$$91 : 3 = 30,33 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 3 \nmid 91$$

$$91 : 7 = 13 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 7 | 91$$

$$91 : 11 = 8,27 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow 11 \nmid 91$$

$$91 : 13 = 7 \Rightarrow \text{División exacta} \Rightarrow 13 | 91$$

### Criterios de divisibilidad

5.- Comprueba, aplicando los criterios de divisibilidad, si los siguientes números son divisibles por 2, por 3, por 4, por 5, por 7, por 9, por 10, por 11, por 25 y por 100.

a) 375

$$375 \neq 2 \Leftrightarrow 2 \nmid 375$$

$$3+7+5=15=3 \Rightarrow 375=3 \Leftrightarrow 3|375$$

$$75 \neq 4 \Rightarrow 375 \neq 4 \Leftrightarrow 4 \nmid 375$$

$$375=5 \Leftrightarrow 5|375$$

$$37-2 \cdot 5=37-10=27 \neq 7 \Rightarrow 375 \neq 7 \Leftrightarrow 7 \nmid 375$$

$$3+7+5=15 \neq 9 \Rightarrow 375 \neq 9 \Leftrightarrow 9 \nmid 375$$

$$375 \neq 10 \Leftrightarrow 10 \nmid 375$$

$$(3+5)-7=8-7=1 \neq 11 \Rightarrow 375 \neq 11 \Leftrightarrow 11 \nmid 375$$

$$75=25 \Rightarrow 375=25 \Leftrightarrow 25|375$$

$$375 \neq 100 \Leftrightarrow 100 \nmid 375$$

b) 990

$$990=2 \Leftrightarrow 2|990$$

$$9+9+0=18=3 \Rightarrow 990=3 \Leftrightarrow 3|990$$

$$90 \neq 4 \Rightarrow 990 \neq 4 \Leftrightarrow 4 \nmid 990$$

$$990=5 \Leftrightarrow 5|990$$

$$99-2 \cdot 0=99-0=99 \neq 7 \Rightarrow 990 \neq 7 \Leftrightarrow 7 \nmid 990$$

$$9+9+0=18=9 \Rightarrow 990=9 \Leftrightarrow 9|990$$

$$990=10 \Leftrightarrow 10|990$$

$$(9+0)-9=9-9=0 \Rightarrow 990=11 \Leftrightarrow 11|990$$

$$90 \neq 25 \Rightarrow 990 \neq 25 \Leftrightarrow 25 \nmid 990$$

$$990=100 \Leftrightarrow 100 \nmid 990$$

c) 1.260

$$1.260=2 \Leftrightarrow 2|1.260$$

$$1+2+6+0=9=3 \Rightarrow 1.260=3 \Leftrightarrow 3|1.260$$

$$60=4 \Rightarrow 1.260=4 \Leftrightarrow 4|1.260$$

$$1.260=5 \Leftrightarrow 5|1.260$$

$$126 - 2 \cdot 0 = 126 - 0 = 126 \rightarrow 12 - 2 \cdot 6 = 12 - 12 = 0 \Rightarrow 1.260 = \dot{7} \Leftrightarrow 7 | 1.260$$

$$1 + 2 + 6 + 0 = 9 = \dot{9} \Rightarrow 1.260 = \dot{9} \Leftrightarrow 9 | 1.260$$

$$1.260 = \dot{10} \Leftrightarrow 10 | 1.260$$

$$(1+6) - (2+0) = 7 - 2 = 5 \neq \dot{11} \Rightarrow 1.260 \neq \dot{11} \Leftrightarrow 11 \nmid 1.260$$

$$60 \neq \dot{25} \Rightarrow 1.260 \neq \dot{25} \Leftrightarrow 25 \nmid 1.260$$

$$1.260 \neq \dot{100} \Leftrightarrow 100 \nmid 1.260$$

d) 1.848

$$1.848 = \dot{2} \Leftrightarrow 2 | 1.848$$

$$1 + 8 + 4 + 8 = 21 = \dot{3} \Rightarrow 1.848 = \dot{3} \Leftrightarrow 3 | 1.848$$

$$48 = \dot{4} \Rightarrow 1.848 = \dot{4} \Leftrightarrow 4 | 1.848$$

$$1.848 \neq \dot{5} \Leftrightarrow 5 \nmid 1.848$$

$$184 - 2 \cdot 8 = 184 - 16 = 168 \rightarrow 16 - 2 \cdot 8 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow 1.848 = \dot{7} \Leftrightarrow 7 | 1.848$$

$$1 + 8 + 4 + 8 = 21 \neq \dot{9} \Rightarrow 1.848 \neq \dot{9} \Leftrightarrow 9 \nmid 1.848$$

$$1.848 \neq \dot{10} \Leftrightarrow 10 \nmid 1.848$$

$$(8+8) - (1+4) = 16 - 5 = 11 = \dot{11} \Rightarrow 1.848 = \dot{11} \Leftrightarrow 11 | 1.848$$

$$48 \neq \dot{25} \Rightarrow 1.848 \neq \dot{25} \Leftrightarrow 25 \nmid 1.848$$

$$1.848 \neq \dot{100} \Leftrightarrow 100 \nmid 1.848$$

e) 3.192

$$3.192 = \dot{2} \Leftrightarrow 2 | 3.192$$

$$3 + 1 + 9 + 2 = 15 = \dot{3} \Rightarrow 3.192 = \dot{3} \Leftrightarrow 3 | 3.192$$

$$92 = \dot{4} \Rightarrow 3.192 = \dot{4} \Leftrightarrow 4 | 3.192$$

$$3.192 \neq \dot{5} \Leftrightarrow 5 \nmid 3.192$$

$$319 - 2 \cdot 2 = 319 - 4 = 315 \rightarrow 31 - 2 \cdot 5 = 31 - 10 = 21 = \dot{7} \Rightarrow 3.192 = \dot{7} \Leftrightarrow 7 | 3.192$$

$$3 + 1 + 9 + 2 = 15 \neq \dot{9} \Rightarrow 3.192 \neq \dot{9} \Leftrightarrow 9 \nmid 3.192$$

$$3.192 \neq \dot{10} \Leftrightarrow 10 \nmid 3.192$$

$$(3+9)-(1+2)=12-3=9 \neq 11 \Rightarrow 3.192 \neq 11 \Leftrightarrow 11 \nmid 3.192$$

$$92 \neq 25 \Rightarrow 3.192 \neq 25 \Leftrightarrow 25 \nmid 3.192$$

$$3.192 \neq 100 \Leftrightarrow 100 \nmid 3.192$$

f) 12.300

$$12.300 = 2 \Leftrightarrow 2 \mid 12.300$$

$$1+2+3+0+0=6=3 \Rightarrow 12.300=3 \Leftrightarrow 3 \mid 12.300$$

$$12.300 = 4 \Leftrightarrow 4 \mid 12.300$$

$$12.300 = 5 \Leftrightarrow 5 \mid 12.300$$

$$1.230 - 2 \cdot 0 = 1.230 - 0 = 1.230 \rightarrow 123 - 2 \cdot 0 = 123 - 0 = 123 \rightarrow 12 - 2 \cdot 3 = 12 - 6 = 6 \neq 7 \Rightarrow 12.300 \neq 7 \Leftrightarrow 7 \nmid 12.300$$

$$1+2+3+0+0=6 \neq 9 \Rightarrow 12.300 \neq 9 \Leftrightarrow 9 \nmid 12.300$$

$$12.300 = 10 \Leftrightarrow 10 \mid 12.300$$

$$(1+3+0)-(3+0)=4-3=1 \neq 11 \Rightarrow 12.300 \neq 11 \Leftrightarrow 11 \nmid 12.300$$

$$12.300 = 25 \Leftrightarrow 25 \mid 12.300$$

$$12.300 = 100 \Leftrightarrow 100 \mid 12.300$$

g) 14.240

$$14.240 = 2 \Leftrightarrow 2 \mid 14.240$$

$$1+4+2+4+0=11 \neq 3 \Rightarrow 14.240 \neq 3 \Leftrightarrow 3 \nmid 14.240$$

$$40 = 4 \Rightarrow 14.240 = 4 \Leftrightarrow 4 \mid 14.240$$

$$14.240 = 5 \Leftrightarrow 5 \mid 14.240$$

$$1.424 - 2 \cdot 0 = 1.424 - 0 = 1.424 \rightarrow 142 - 2 \cdot 4 = 142 - 8 = 134 \rightarrow 13 - 2 \cdot 4 = 13 - 8 = 5 \neq 7 \Rightarrow 14.240 \neq 7 \Leftrightarrow 7 \nmid 14.240$$

$$1+4+2+4+0=11 \neq 9 \Rightarrow 14.240 \neq 9 \Leftrightarrow 9 \nmid 14.240$$

$$14.240 = 10 \Leftrightarrow 10 \mid 14.240$$

$$(4+4)-(1+2+0)=8-3=5 \neq 11 \Rightarrow 14.240 \neq 11 \Leftrightarrow 11 \nmid 14.240$$

$$40 \neq 25 \Rightarrow 14.240 \neq 25 \Leftrightarrow 25 \nmid 14.240$$

$$14.240 \neq 100 \Leftrightarrow 100 \nmid 14.240$$

h) 32.123

$$32.123 \neq 2 \Leftrightarrow 2 \nmid 32.123$$

$$3+2+1+2+3=11 \neq 3 \Rightarrow 32.123 \neq 3 \Leftrightarrow 3 \nmid 32.123$$

$$23 \neq 4 \Rightarrow 32.123 \neq 4 \Leftrightarrow 4 \nmid 32.123$$

$$32.123 \neq 5 \Leftrightarrow 5 \nmid 32.123$$

$$3 \cdot 212 - 2 \cdot 3 = 3 \cdot 212 - 6 = 3 \cdot 206 \rightarrow 320 - 2 \cdot 6 = 320 - 12 = 308 \rightarrow 30 - 2 \cdot 8 = 30 - 16 = 14 = 7 \Rightarrow \\ \Rightarrow 32.123 = 7 \Leftrightarrow 7 \mid 32.123$$

$$3+2+1+2+3=11 \neq 9 \Rightarrow 32.123 \neq 9 \Leftrightarrow 9 \nmid 32.123$$

$$(3+1+3)-(2+2)=7-4=3 \neq 11 \Rightarrow 32.123 \neq 11 \Leftrightarrow 11 \nmid 32.123$$

$$23 \neq 25 \Rightarrow 32.123 \neq 25 \Leftrightarrow 25 \nmid 32.123$$

$$32.123 \neq 100 \Leftrightarrow 100 \nmid 32.123$$

6.- Determina si los números 3.033, 18.951, 21.073 y 90 son múltiplos de 3 y de 9 a la vez.

$$3+0+3+3=9 \Rightarrow \begin{cases} 3.033 = 3 \\ 3.033 = 9 \end{cases} \quad 1+8+9+5+1=24 \Rightarrow \begin{cases} 18.951 = 3 \\ 18.951 = 9 \end{cases}$$

$$2+1+0+7+3=13 \Rightarrow \begin{cases} 21.073 \neq 3 \\ 21.073 \neq 9 \end{cases} \quad 9+0=9 \Rightarrow \begin{cases} 90 = 3 \\ 90 = 9 \end{cases}$$

7.- Determina si los números 144, 900, 4.255 y 1.875 son múltiplos de 4 y 25 a la vez.

$$144 \Rightarrow \begin{cases} 144 = 4 \\ 144 \neq 25 \end{cases} \quad 900 \Rightarrow \begin{cases} 900 = 4 \\ 900 = 25 \end{cases} \quad 4.255 \Rightarrow \begin{cases} 4.255 \neq 4 \\ 4.255 \neq 25 \end{cases} \quad 1.875 \Rightarrow \begin{cases} 1.875 \neq 4 \\ 1.875 = 25 \end{cases}$$

8.- Determina cuáles de los siguientes números son múltiplos de 11.

a) 31

$$3-1=2 \neq 11 \Rightarrow 31 \neq 11$$

b) 99

$$9-9=0 \Rightarrow 99 = 11$$

c) 2.728

$$(7+8)-(2+2)=15-4=11=1\dot{1} \Rightarrow 2.728=1\dot{1}$$

d) 5.500

$$(5+0)-(5+0)=5-5=0 \Rightarrow 5.500=1\dot{1}$$

e) 528.726

$$(5+8+2)-(2+7+6)=15-15=0 \Rightarrow 528.726=1\dot{1}$$

f) 719.290

$$(7+9+9)-(1+2+0)=25-3=22=1\dot{1} \Rightarrow 719.290=1\dot{1}$$

9.- Determina cuáles de los siguientes números son múltiplos de 7.

a) 41

$$4-2 \cdot 1=4-2=2 \neq \dot{7} \Rightarrow 41 \neq \dot{7}$$

b) 777

$$77-2 \cdot 7=77-14=63 \rightarrow 6-2 \cdot 3=6-6=0 \Rightarrow 777=\dot{7}$$

c) 1.777

$$177-2 \cdot 7=177-14=163 \rightarrow 16-2 \cdot 3=16-6=10 \neq \dot{7} \Rightarrow 1.777 \neq \dot{7}$$

d) 3.836

$$383-2 \cdot 6=383-12=371 \rightarrow 37-2 \cdot 1=37-2=35=\dot{7} \Rightarrow 3.836=\dot{7}$$

e) 38.275

$$3.827-2 \cdot 5=3.827-10=3.817 \rightarrow 381-2 \cdot 7=381-14=367 \rightarrow 36-2 \cdot 7=36-14=22 \neq \dot{7} \Rightarrow 38.275 \neq \dot{7}$$

f) 321.272

$$32.127-2 \cdot 2=32.127-4=32.123 \rightarrow 3.212-2 \cdot 3=3.212-6=3.206 \rightarrow 320-2 \cdot 6=320-12=308 \rightarrow 30-2 \cdot 8=30-16=14=\dot{7} \Rightarrow 321.272=\dot{7}$$

10.- Comprueba que 86.328 es múltiplo de 3 y de 11. Haciendo la división comprueba que también es múltiplo de  $11 \cdot 3 = 33$ .

$$\left. \begin{array}{l} 8+6+3+2+8=27=3\dot{3} \Rightarrow 86.328=3\dot{3} \\ (8+3+8)-(6+2)=19-8=11 \Rightarrow 86.328=1\dot{1} \end{array} \right\} \Rightarrow 86.328=3\dot{3}=3 \cdot 11$$

## Números primos y números compuestos

11.- Construye la criba de Eratóstenes con los números naturales hasta el 100.

Criba de Eratóstenes hasta el 100

12.- Clasifica los siguientes números según sean primos o compuestos:

- |       |       |
|-------|-------|
| a) 8  | b) 97 |
| c) 57 | d) 49 |
| e) 61 | f) 63 |

Números primos	97, 61
Números compuestos	8, 57, 49, 63

13.- ¿Cuántos números primos pares hay? Razona tu respuesta.

*El único número par primo es el 2.*

*Los demás números pares no son números primos porque son divisibles por 2.*

14.- Escribe los números primos comprendidos entre 500 y 550.

Números primos menores que 2.000

*Números primos*

←————→

500 < 503, 509, 521, 523, 541, 547 < 550

15.- El número 37 es primo. ¿Cómo es el número 3.737?

$$3.737 : 37 = 101 \Rightarrow 3.737 = 37 \cdot 101 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3.737 = 37 \\ 3.737 = 101 \end{array} \right\} \Rightarrow 3.737 \rightarrow \text{número compuesto}$$

## Descomposición de un número natural en factores primos

16.- Factoriza:

a) 80

80		2	
40		2	
20		2	
10		2	80 = 2 <sup>4</sup> · 5
5		5	
1			

b) 210

210		2	
105		3	
35		5	210 = 2 · 3 · 5 · 7

$$\begin{array}{r|l} 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

c) 396

$$\begin{array}{r|l} 396 & 2 \\ 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

d) 42

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

e) 300

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

f) 37

$$\begin{array}{r|l} 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

$$37 = 37 \Rightarrow \text{Número primo}$$

g) 360

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

h) 108

108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

i) 520

520	2
260	2
130	2
65	5
13	13
1	

$$520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$$

k) 100

100	2
50	2
25	5
5	5
1	

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

l) 750

750	2
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

$$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$$

m) 840

840	2
420	2
210	2
105	3
35	5
7	7

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

1 |

n) 103

103 | 103  
1 |

$$103 = 103 \Rightarrow \text{Número primo}$$

ñ) 120

120 | 2  
60 | 2  
30 | 2  
15 | 3  
5 | 5  
1 |

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

o) 2.100

2.100 | 2  
1.050 | 2  
525 | 3  
175 | 5  
35 | 5  
7 | 7  
1 |

$$2.100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

p) 2.294

2.294 | 2  
1.147 | 31  
37 | 37  
1 |

$$2.294 = 2 \cdot 31 \cdot 37$$

q) 89

89 | 89  
1 |

$$89 = 89 \Rightarrow \text{Número primo}$$

r) 864

864 | 2  
432 | 2  
216 | 2  
108 | 2  
54 | 2

$$864 = 2^5 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

s) 54

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

t) 1.372

$$\begin{array}{r|l} 1.372 & 2 \\ 686 & 2 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$1.372 = 2^2 \cdot 7^3$$

u) 2.000

$$\begin{array}{r|l} 2.000 & 2 \\ 1.000 & 2 \\ 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$2.000 = 2^4 \cdot 5^3$$

v) 420

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

w) 5.200

5.200	2
2.600	2
1.300	2
650	2
325	5
65	5
13	13
1	

$$5.200 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 13$$

x) 2.205

2.205	3
735	3
245	5
49	7
7	7
1	

$$2.205 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$$

y) 4.212

4.212	2
2.106	2
1.053	3
351	3
117	3
39	3
13	13
1	

$$4.212 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 13$$

z) 9.450

9.450	2
4.725	3
1.575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$9.450 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

### Conjunto de todos los divisores de un número natural

17.- Calcula todos los divisores de:

a) 24

1

$$24 = \begin{array}{l} 1 \cdot 24 \\ 2 \cdot 12 \\ 3 \cdot 8 \\ 4 \cdot 6 \\ 6 \cdot 4 \end{array}$$

2

$$N^{\circ} \text{ div} \{24\} = 8$$

$$\text{Div} \{24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{24\} = (3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$3^0$	1	1	2	4	8
$3^1$	3	3	6	12	24

$$\text{Div} \{24\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

b) 27

1

$$27 = \begin{array}{l} 1 \cdot 27 \\ 3 \cdot 9 \\ 9 \cdot 3 \end{array}$$

2

$$N^{\circ} \text{ div} \{27\} = 4$$

$$\text{Div} \{27\} = \{1, 3, 9, 27\}$$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$27 = 3^3$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{27\} = 3+1 = 4$$

		$3^0$	$3^1$	$3^2$	$3^3$
	x	1	3	9	27
$1^0$	1	1	3	9	27

$$\text{Div} \{27\} = \{1, 3, 9, 27\}$$

c) 7

1

$$7 = \frac{1 \cdot 7}{7 \cdot 1} \quad N^\circ \text{ div}\{7\}=2 \quad \text{Div}\{7\}=\{1, 7\} \quad \text{Número primo}$$

2

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 7} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 7=7 \\ N^\circ \text{ div}\{7\}=1+1=2 \end{array} \quad \text{Número primo}$$

		$7^0$	$7^1$
	x	1	7
$1^0$	1	1	7

$$\text{Div}\{7\}=\{1, 7\} \quad \text{Número primo}$$

d) 48

1

$$48 = \begin{array}{l} 1 \cdot 48 \\ 2 \cdot 24 \\ 3 \cdot 16 \\ 4 \cdot 12 \\ 6 \cdot 8 \\ 8 \cdot 6 \end{array}$$

$$N^\circ \text{ div}\{48\}=10 \quad \text{Div}\{48\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

2

$$\begin{array}{r} 48 \overline{) 2} \\ 24 \overline{) 2} \\ 12 \overline{) 2} \\ 6 \overline{) 2} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 48=2^4 \cdot 3 \\ N^\circ \text{ div}\{48\}=(4+1) \cdot (1+1)=5 \cdot 2=10 \end{array}$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$
	x	1	2	4	8	16
$3^0$	1	1	2	4	8	16
$3^1$	3	3	6	12	24	48

$$\text{Div}\{48\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

e) 25

1

$$25 = \begin{array}{l} 1 \cdot 25 \\ 5 \cdot 5 \end{array}$$

$$N^{\circ} \text{ div}\{25\} = 3$$

$$\text{Div}\{25\} = \{1, 5, 25\}$$

2

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$25 = 5^2$$

$$N^{\circ} \text{ div}\{25\} = 2 + 1 = 3$$

		$5^0$	$5^1$	$5^2$
	x	1	5	25
$1^0$	1	1	5	25

$$\text{Div}\{25\} = \{1, 5, 25\}$$

f) 56

1

$$56 = \begin{array}{l} 1 \cdot 56 \\ 2 \cdot 28 \\ 4 \cdot 14 \\ 7 \cdot 8 \\ 8 \cdot 7 \end{array}$$

$$N^{\circ} \text{ div}\{56\} = 8$$

$$\text{Div}\{56\} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

2

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$56 = 2^3 \cdot 7$$

$$N^{\circ} \text{ div}\{56\} = (3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$7^0$	1	1	2	4	8
$7^1$	7	7	14	28	56

$$\text{Div}\{56\} = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$$

g) 220

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{220\} = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$
x		1	2	4
$5^0$	1	1	2	4
$5^1$	5	5	10	20

		1	2	4	5	10	20
x		1	2	4	5	10	20
$11^0$	1	1	2	4	5	10	20
$11^1$	11	11	22	44	55	110	220

$$\text{Div} \{220\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\}$$

h) 13

$$\begin{array}{r|l} 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$13 = 13$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{13\} = 1 + 1 = 2$$

*Número primo*

		$13^0$	$13^1$
x		1	13
$1^0$	1	1	13

$$\text{Div} \{13\} = \{1, 13\}$$

*Número primo*

i) 250

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$250 = 2 \cdot 5^3$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{250\} = (1+1) \cdot (3+1) = 2 \cdot 4 = 8$$

		$2^0$	$2^1$
	x	1	2
$5^0$	1	1	2
$5^1$	5	5	10
$5^2$	25	25	50
$5^3$	125	125	250

$$Div\{250\} = \{1, 2, 5, 10, 25, 50, 125, 250\}$$

j) 100

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

$$N^{\circ} div\{100\} = (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$
	x	1	2	4
$5^0$	1	1	2	4
$5^1$	5	5	10	20
$5^2$	25	25	50	100

$$Div\{100\} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$$

k) 65

$$\begin{array}{r|l} 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$65 = 5 \cdot 13$$

$$N^{\circ} div\{65\} = (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

		$5^0$	$5^1$
	x	1	5
$13^0$	1	1	5
$13^1$	13	13	65

$$Div\{65\} = \{1, 5, 13, 65\}$$

l) 600

600 | 2  
 300 | 2  
 150 | 2  
 75 | 3  
 25 | 5  
 5 | 5  
 1 |

$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$N^{\circ} \text{ div } \{600\} = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$3^0$	1	1	2	4	8
$3^1$	3	3	6	12	24

		1	2	3	4	6	8	12	24
	x	1	2	3	4	6	8	12	24
$5^0$	1	1	2	3	4	6	8	12	24
$5^1$	5	5	10	15	20	30	40	60	120
$5^2$	25	25	50	75	100	150	200	300	600

$$\text{Div}\{600\} = \left\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300, 600 \right\}$$

m) 648

648 | 2  
 324 | 2  
 162 | 2  
 81 | 3  
 27 | 3  
 9 | 3  
 3 | 3  
 1 |

$$648 = 2^3 \cdot 3^4$$

$$N^{\circ} \text{ div } \{648\} = (3+1) \cdot (4+1) = 4 \cdot 5 = 20$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$3^0$	1	1	2	4	8
$3^1$	3	3	6	12	24
$3^2$	9	9	18	36	72
$3^3$	27	27	54	108	216
$3^4$	81	81	162	324	648

$$Div\{648\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 54, 72, 81, 108, 162, 216, 324, 648\}$$

n) 700

700		2
350		2
175		5
35		5
7		7
1		

$$700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$N^\circ div\{700\} = (2+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$
	x	1	2	4
$5^0$	1	1	2	4
$5^1$	5	5	10	20
$5^2$	25	25	50	100

	x	1	2	4	5	10	20	25	50	100
$7^0$	1	1	2	4	5	10	20	25	50	100
$7^1$	7	7	14	28	35	70	140	175	350	700

$$Div\{700\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 25, 28, 35, 50, 70, 100, 140, 175, 350, 700\}$$

18.- Determina cuáles de estos números tienen, exactamente, tres divisores:

a) 4

$$4 = 2^2 \Rightarrow N^\circ div(4) = 2 + 1 = 3$$

b) 25

$$25 = 5^2 \Rightarrow N^\circ div(25) = 2 + 1 = 3$$

c) 15

$$15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(15) = (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

d) 49

$$49 = 7^2 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(49) = 2 + 1 = 3$$

e) 36

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(36) = (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$$

f) 72

$$72 = 2^3 \cdot 3^2 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(72) = (3+1) \cdot (2+1) = 4 \cdot 3 = 12$$

19.- Determina cuáles de estos números tienen, exactamente, cuatro divisores:

a) 77

$$77 = 7 \cdot 11 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(77) = (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

b) 6

$$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(6) = (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

c) 12

$$12 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(12) = (2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$$

d) 8

$$8 = 2^3 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(8) = 3 + 1 = 4$$

e) 21

$$21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(21) = (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 = 4$$

f) 30

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(30) = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 6$$

g) 27

$$27 = 3^3 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(27) = 3 + 1 = 4$$

h) 125

$$125 = 5^3 \Rightarrow N^{\circ} \text{div}(125) = 3 + 1 = 4$$

20.- Escribe tres números que solo tengan tres divisores y otros tres que solo tengan cuatro divisores.

$$3 \text{ divisores} \Rightarrow (2+1) \Rightarrow (\text{Número primo})^2 \Rightarrow \text{Ejemplos} \left\{ \begin{array}{l} 2^2=4 \\ 3^2=9 \\ 5^2=25 \end{array} \right.$$

$$4 \text{ divisores} \Rightarrow (3+1) \Rightarrow (\text{Número primo})^3 \Rightarrow \text{Ejemplos} \left\{ \begin{array}{l} 2^3=8 \\ 3^3=27 \\ 5^3=125 \end{array} \right.$$

$$4 \text{ divisores} \Rightarrow (1+1) \cdot (1+1) \Rightarrow (\text{Número primo}) \cdot (\text{Número primo}) \Rightarrow \text{Ejemplos} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 3=6 \\ 2 \cdot 5=10 \\ 3 \cdot 7=21 \end{array} \right.$$

### Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de números naturales

21.- Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

Puedes comprobar los resultados con Qalculate!

a) 2 y 16

$2 \mid 2$	$16 \mid 2$	$2=2$ $16=2^4$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $mcd=2$ $mcm=2^4=16$
$1 \mid$	$8 \mid 2$	
	$4 \mid 2$	
	$2 \mid 2$	
	$1 \mid$	

· Conclusión:

*El mcd es el número menor, el 2, y el mcm es el número mayor, el 16  $\Rightarrow$  16 es múltiplo de 2*

· Comprobación:

$$\begin{aligned} mcd(2, 16) \cdot mcm(2, 16) &= 2 \cdot 16 \\ 2 \cdot 16 &= 2 \cdot 16 \\ 32 &= 32 \end{aligned}$$

b) 3 y 25

$3 \mid 3$	$25 \mid 5$	$3=1 \cdot 3$ $25=1 \cdot 5^2$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black;"/> $mcd=1$ $mcm=1 \cdot 3 \cdot 5^2=1 \cdot 3 \cdot 25=75$
$1 \mid$	$5 \mid 5$	
	$1 \mid$	

· Consideración:

*El 1, como elemento neutro de la multiplicación; aunque no aparezca, siempre está presente*

· Conclusión:

*mcd=1  $\Rightarrow$  3 y 25; números primos entre sí*

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(3, 25) \cdot \text{mcm}(3, 25) &= 3 \cdot 25 \\ 1 \cdot 75 &= 3 \cdot 25 \\ 75 &= 75 \end{aligned}$$

c) 12 y 90

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 90 \\ & 2 \\ & 45 \\ & 3 \\ & 15 \\ & 3 \\ & 5 \\ & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 12 &= 2^2 \cdot 3 \\ 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \hline \text{mcd} &= 2 \cdot 3 = \mathbf{6} \\ \text{mcm} &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = \mathbf{180} \end{aligned}$$

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(12, 90) \cdot \text{mcm}(12, 90) &= 12 \cdot 90 \\ 6 \cdot 180 &= 12 \cdot 90 \\ 1.080 &= 1.080 \end{aligned}$$

d) 18 y 72

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 72 \\ & 2 \\ & 36 \\ & 2 \\ & 18 \\ & 2 \\ & 9 \\ & 3 \\ & 3 \\ & 3 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \cdot 3^2 \\ 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\ \hline \text{mcd} &= 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = \mathbf{18} \\ \text{mcm} &= 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = \mathbf{72} \end{aligned}$$

· Conclusión:

*72 es múltiplo de 18*

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(18, 72) \cdot \text{mcm}(18, 72) &= 18 \cdot 72 \\ 18 \cdot 72 &= 18 \cdot 72 \\ 1.296 &= 1.296 \end{aligned}$$

e) 27 y 56

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline & 56 \\ & 2 \\ & 28 \\ & 2 \\ & 14 \\ & 2 \\ & 7 \\ & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 27 &= 3^3 \\ 56 &= 2^3 \cdot 7 \\ \hline \text{mcd} &= \mathbf{1} \\ \text{mcm} &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 8 \cdot 27 \cdot 7 = \mathbf{1.512} \end{aligned}$$

· Conclusión:

*27 y 56; números primos entre sí*

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(27, 56) \cdot \text{mcm}(27, 56) &= 27 \cdot 56 \\ 1 \cdot 1.512 &= 27 \cdot 56 \\ 1.512 &= 1.512 \end{aligned}$$

f) 135 y 180

135	3	180	2
45	3	90	2
15	3	45	3
5	5	15	3
1		5	5
		1	

$$\begin{aligned} 135 &= 3^3 \cdot 5 \\ 180 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \hline \text{mcd} &= 3^2 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = \mathbf{45} \\ \text{mcm} &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 4 \cdot 27 \cdot 5 = \mathbf{540} \end{aligned}$$

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(135, 180) \cdot \text{mcm}(135, 180) &= 135 \cdot 180 \\ 45 \cdot 540 &= 135 \cdot 180 \\ 24.300 &= 24.300 \end{aligned}$$

g) 220 y 385

220	2	385	5
110	2	77	7
55	5	11	11
11	11	1	
1			

$$\begin{aligned} 220 &= 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ 385 &= 5 \cdot 7 \cdot 11 \\ \hline \text{mcd} &= 5 \cdot 11 = \mathbf{55} \\ \text{mcm} &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \mathbf{1.540} \end{aligned}$$

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(220, 385) \cdot \text{mcm}(220, 385) &= 220 \cdot 385 \\ 55 \cdot 1.540 &= 220 \cdot 385 \\ 84.700 &= 84.700 \end{aligned}$$

h) 108 y 144

108	2	144	2
54	2	72	2
27	3	36	2
9	3	18	2
3	3	9	3
1		3	3
		1	

$$\begin{aligned} 108 &= 2^2 \cdot 3^3 \\ 144 &= 2^4 \cdot 3^2 \\ \hline \text{mcd} &= 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = \mathbf{36} \\ \text{mcm} &= 2^4 \cdot 3^3 = 16 \cdot 27 = \mathbf{432} \end{aligned}$$

· Comprobación:

$$\begin{aligned} \text{mcd}(108, 144) \cdot \text{mcm}(108, 144) &= 108 \cdot 144 \\ 36 \cdot 432 &= 108 \cdot 144 \\ 15.552 &= 15.552 \end{aligned}$$

i) 198 y 484

$$\begin{array}{r|l} 198 & 2 \\ 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 484 & 2 \\ 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11 \\ 484 = 2^2 \cdot 11^2 \\ \hline mcd = 2 \cdot 11 = \mathbf{22} \\ mcm = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 = 4 \cdot 9 \cdot 121 = \mathbf{4.356} \end{array}$$

· Comprobación:

$$\begin{array}{l} mcd(198, 484) \cdot mcm(198, 484) = 198 \cdot 484 \\ 22 \cdot 4.356 = 198 \cdot 484 \\ 95.832 = 95.832 \end{array}$$

j) 35 y 44

$$\begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 35 = 5 \cdot 7 \\ 44 = 2^2 \cdot 11 \\ \hline mcd = \mathbf{1} \\ mcm = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \mathbf{1.540} \end{array}$$

· Conclusión:

35 y 44; números primos entre sí

· Comprobación:

$$\begin{array}{l} mcd(35, 44) \cdot mcm(35, 44) = 35 \cdot 44 \\ 1 \cdot 1.540 = 35 \cdot 44 \\ 1.540 = 1.540 \end{array}$$

k) 25 y 40

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 25 = 5^2 \\ 40 = 2^3 \cdot 5 \\ \hline mcd = \mathbf{5} \\ mcm = 2^3 \cdot 5^2 = 8 \cdot 25 = \mathbf{200} \end{array}$$

· Comprobación:

$$\begin{array}{l} mcd(25, 40) \cdot mcm(25, 40) = 25 \cdot 40 \\ 5 \cdot 200 = 25 \cdot 40 \\ 1.000 = 1.000 \end{array}$$

l) 121 y 77

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 121 = 11^2 \\ 77 = 7 \cdot 11 \\ \hline mcd = 11 \\ mcm = 7 \cdot 11^2 = 7 \cdot 121 = 847 \end{array}$$

· Comprobación:

$$\begin{array}{l} mcd(121, 77) \cdot mcm(121, 77) = 121 \cdot 77 \\ 11 \cdot 847 = 121 \cdot 77 \\ 9.317 = 9.317 \end{array}$$

22.- Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

Puedes comprobar los resultados con **Qalculate!**

a) 9, 12 y 18

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9 = 3^2 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ \hline mcd = 3 \\ mcm = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \end{array}$$

b) 27, 36 y 63

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 27 = 3^3 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 63 = 3^2 \cdot 7 \\ \hline mcd = 3^2 = 9 \\ mcm = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 4 \cdot 27 \cdot 7 = 756 \end{array}$$

c) 8, 27 y 32

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ 27 = 3^3 \\ 32 = 2^5 \\ \hline mcd = 1 \\ mcm = 2^5 \cdot 3^3 = 32 \cdot 27 = 864 \end{array}$$

8, 27 y 32; números primos entre sí

d) 42, 48 y 72

42	2	48	2	72	2
21	3	24	2	36	2
7	7	12	2	18	2
1		6	2	9	3
		3	3	3	3
		1		1	

$$\begin{aligned}
 42 &= 2 \cdot 3 \cdot 7 \\
 48 &= 2^4 \cdot 3 \\
 72 &= 2^3 \cdot 3^2 \\
 \hline
 mcd &= 2 \cdot 3 = 6 \\
 mcm &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 7 = \mathbf{1.008}
 \end{aligned}$$

e) 30, 45 y 60

30	2	45	3	60	2
15	3	15	3	30	2
5	5	5	5	15	3
1		1		5	5
				1	

$$\begin{aligned}
 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 45 &= 3^2 \cdot 5 \\
 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\
 \hline
 mcd &= 3 \cdot 5 = \mathbf{15} \\
 mcm &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = \mathbf{180}
 \end{aligned}$$

f) 90, 180 y 400

90	2	180	2	400	2
45	3	90	2	200	2
15	3	45	3	100	2
5	5	15	3	50	2
1		5	5	25	5
		1		5	5
				1	

$$\begin{aligned}
 90 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 180 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
 400 &= 2^4 \cdot 5^2 \\
 \hline
 mcd &= 2 \cdot 5 = \mathbf{10} \\
 mcm &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 9 \cdot 25 = \mathbf{3.600}
 \end{aligned}$$

g) 98, 154 y 1.715

98	2	154	2	1.715	5
49	7	77	7	343	7
7	7	11	11	49	7
1		1		7	7
				1	

$$\begin{aligned}
 98 &= 2 \cdot 7^2 \\
 154 &= 2 \cdot 7 \cdot 11 \\
 1.715 &= 5 \cdot 7^3 \\
 \hline
 mcd &= 7 \\
 mcm &= 2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 = 2 \cdot 5 \cdot 343 \cdot 11 = \mathbf{37.730}
 \end{aligned}$$

h) 5, 15 y 35

$$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ & 5 \cdot 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 35 & 5 \\ & 7 \cdot 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 = 5 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 35 = 5 \cdot 7 \\ \hline mcd = 5 \\ mcm = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \end{array}$$

i) 54, 180 y 216

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ & 90 \cdot 2 \\ & 45 \cdot 3 \\ & 15 \cdot 3 \\ & 5 \cdot 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 54 = 2 \cdot 3^3 \\ 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 216 = 2^3 \cdot 3^3 \\ \hline mcd = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18 \\ mcm = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 8 \cdot 27 \cdot 5 = 1.080 \end{array}$$

j) 240, 360 y 600

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ & 180 \cdot 2 \\ & 90 \cdot 2 \\ & 45 \cdot 3 \\ & 15 \cdot 3 \\ & 5 \cdot 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ \hline mcd = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \\ mcm = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 9 \cdot 25 = 3.600 \end{array}$$

k) 250, 625 y 800

$$\begin{array}{r|l} 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ & 125 \cdot 5 \\ & 25 \cdot 5 \\ & 5 \cdot 5 \\ & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 800 & 2 \\ 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 250 = 2 \cdot 5^3 \\ 625 = 5^4 \\ 800 = 2^5 \cdot 5^2 \\ \hline mcd = 5^2 = 25 \\ mcm = 2^5 \cdot 5^4 = 32 \cdot 625 = 20.000 \end{array}$$

l) 33, 77 y 121

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 33 = 3 \cdot 11 \\ 77 = 7 \cdot 11 \\ 121 = 11^2 \\ \hline mcd = \mathbf{11} \\ mcm = 3 \cdot 7 \cdot 11^2 = 3 \cdot 7 \cdot 121 = \mathbf{2.541} \end{array}$$

23.- Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:

Puedes comprobar los resultados con Qalculate!

a) 4, 6, 18 y 32

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 32 = 2^5 \\ \hline mcd = \mathbf{2} \\ mcm = 2^5 \cdot 3^2 = 32 \cdot 9 = \mathbf{288} \end{array}$$

b) 4, 5, 16 y 80

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 5 = 5 \\ 16 = 2^4 \\ 80 = 2^4 \cdot 5 \\ \hline mcd = \mathbf{1} \\ mcm = 2^4 \cdot 5 = 16 \cdot 5 = \mathbf{80} \end{array}$$

4, 5, 16 y 80; números primos entre sí

c) 3, 4, 6 y 12

$$\begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 = 3 \\ 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ \hline mcd = \mathbf{1} \\ mcm = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = \mathbf{12} \end{array}$$

3, 4, 6 y 12; números primos entre sí

d) 3, 5, 6 y 30

$3 \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}$	$5 \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}$	$6 \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$30 \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{array}$
---	---	--	--

$$3 = 3$$

$$5 = 5$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$


---


$$mcd = 1$$

$$mcm = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

3, 5, 6 y 30; números primos entre sí

e) 3, 4, 12, 36 y 48

$3 \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}$	$4 \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 1 \end{array}$	$12 \begin{array}{l} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$36 \begin{array}{l} 2 \\ 18 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}$	$48 \begin{array}{l} 2 \\ 24 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array}$
---	--	--	---	---

$$3 = 3$$

$$4 = 2^2$$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$


---


$$mcd = 1$$

$$mcm = 2^4 \cdot 3^2 = 16 \cdot 9 = 144$$

3, 4, 12, 36 y 48; números primos entre sí

f) 5, 10, 15, 25 y 50

$5 \begin{array}{l} 5 \\ 1 \end{array}$	$10 \begin{array}{l} 2 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$15 \begin{array}{l} 3 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$25 \begin{array}{l} 5 \\ 5 \\ 1 \end{array}$	$50 \begin{array}{l} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{array}$
---	---	---	---	--

$$5 = 5$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$25 = 5^2$$

$$50 = 2 \cdot 5^2$$


---


$$mcd = 1$$

$$mcm = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 3 \cdot 25 = 150$$

### Resolución de problemas

24.- Averigua un número que cumpla: *Es múltiplo de 7. Tiene tres cifras distintas. Sus cifras están ordenadas de mayor a menor.*

$$\begin{cases} abc = \dot{7} \\ a > b > c \end{cases}$$

Ejemplos:

210  
420  
721

25.- Calcula el número de divisores de 12. Sabiendo que 36 es igual a  $3 \cdot 12$ , ¿cuántos divisores tendrá?

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$

$N^\circ \text{ div } \{12\} = (2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$

$36 = 3 \cdot 12 \Rightarrow 36 = 2^2 \cdot 3^2 \Rightarrow N^\circ \text{ div } \{36\} = (2+1) \cdot (2+1) = 3 \cdot 3 = 9$

26.- Los alumnos de una clase han colocado sus mesas separadas, formando un rectángulo. Si la clase tiene 30 alumnos, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar?

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$N^\circ \text{ div } \{30\} = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

		$2^0$	$2^1$
	x	1	2
$3^0$	1	1	2
$3^1$	3	3	6

		1	2	3	6
	x	1	2	3	6
$5^0$	1	1	2	3	6
$5^1$	5	5	10	15	30

$Div\{30\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

Opciones:

$1 \cdot 30, 2 \cdot 15, 3 \cdot 10, 5 \cdot 6$

27.- ¿De cuántas maneras se pueden sembrar 54 cerezos de manera que formen un rectángulo?

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$54 = 2 \cdot 3^3$

$N^\circ \text{ div } \{54\} = (1+1) \cdot (3+1) = 2 \cdot 4 = 8$

		$2^0$	$2^1$
	x	1	2
$3^0$	1	1	2
$3^1$	3	3	6
$3^2$	9	9	18
$3^3$	27	27	54

$$\text{Div}\{24\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54\}$$

Opciones:

$$1 \cdot 54, 2 \cdot 27, 3 \cdot 18, 6 \cdot 9$$

28.- Un grupo de amigos va de excursión. Antes de reservar el autobús, han visto que pueden ir de 2 en 2, de 3 en 3 o de 5 en 5, sin que sobre ninguno.

a) Encuentra al menos tres valores que cumplan estas condiciones.

$$\text{Menor número de alumnos} \Rightarrow \text{mcm}(2, 3, 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \quad 30, 60, 90 \text{ alumnos...}$$

b) En otra excursión han intentado contar de la misma forma, pero al hacer grupos de 2 en 2, de 3 en 3 o de 5 en 5 siempre sobraba una persona. ¿Cuál puede el número de amigos que forman este grupo?

$$\text{Menor número de alumnos} \Rightarrow \text{mcm}(2, 3, 5) + 1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 30 + 1 = 31$$

$$31, 61, 91 \text{ alumnos...}$$

29.- Jaime observa que los alumnos que participan en las olimpiadas escolares se pueden contar exactamente de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6. ¿Cuál es el menor número de alumnos que participan en las olimpiadas?

$$\text{Menor número de alumnos} \Rightarrow \text{mcm}(2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\begin{array}{l} 2=2 \\ 3=3 \\ 4=2^2 \\ 5=5 \\ 6=2 \cdot 3 \\ \hline \text{mcm} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ alumnos} \end{array}$$

30.- María cuenta de 3 en 3; Marta, de 5 en 5; y Raúl, de 7 en 7. ¿En qué múltiplo coincidirán por primera vez?

$$\begin{array}{l} 3=3 \\ 5=5 \\ 7=7 \\ \hline \text{mcm} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \end{array}$$

31.- Escribe un número de cuatro cifras que sea divisible por 2 y por 3 y que no lo sea por 5.

$$abcd = \dot{2} \Rightarrow d = 0, 2, 4, 6, 8$$

$$abcd = \dot{3} \Rightarrow a + b + c + d = \dot{3}$$

$$abcd \neq \dot{5} \Rightarrow d \neq 0, 5$$

Ejemplos  $\rightarrow$  3.312, 5.214, 6.666, 7.548

32.- Encuentra dos números de cinco cifras que sean divisibles por 2 y por 5 a la vez, y no lo sean por 100.

$$abcde = \dot{2} \Rightarrow e = 0, 2, 4, 6, 8$$

$$abcde = \dot{5} \Rightarrow e = 0, 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} abcde = \dot{2} \\ abcde = \dot{5} \end{array} \right\} \Rightarrow e = 0$$

$$abcde \neq 1\dot{0}0 \Rightarrow d \neq 0 \vee e \neq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} abcde = \dot{2} \\ abcde = \dot{5} \\ abcde \neq 1\dot{0}0 \end{array} \right\} \Rightarrow d \neq 0 \wedge e = 0$$

Ejemplos  $\rightarrow$  23.340, 58.560...

33.- Escribe un número de cinco cifras que sea múltiplo de 3 y de 11, pero no de 9.

Número  $\rightarrow abcde$

$$abcde = \dot{3} \Rightarrow a + b + c + d + e = \dot{3}$$

$$abcde = \dot{1}1 \Rightarrow (b + d) - (a + c + e) = 0$$

$$abcde \neq \dot{9} \Rightarrow a + b + c + d + e \neq \dot{9}$$

Ejemplos  $\rightarrow$  30.030, 60.060...

34.- Escribe un número de cinco cifras que sea múltiplo de 9 y de 11. ¿Es múltiplo de 3?

Número  $\rightarrow abcde$

$$abcde = \dot{9} \Rightarrow a + b + c + d + e = \dot{9}$$

$$abcde = \dot{1}1 \Rightarrow (b + d) - (a + c + e) = 0$$

Ejemplos  $\rightarrow$  90,090, 99,990...

$$abcde = \dot{9} \Rightarrow abcde = \dot{3}$$

35.- Busca un número de seis cifras que sea divisible por 3 y por 5. Comprueba que también es divisible por 15.

Número  $\rightarrow abcdef$

$$abcdef = \dot{3} \Rightarrow a + b + c + d + e + f = \dot{3}$$

$$abcdef = \dot{5} \Rightarrow f = 0, 5$$

Ejemplos  $\rightarrow 343.920, 113.325 \dots$

$$343.920 : 15 = 22.928 \Rightarrow 343.920 = 1\dot{5}$$

$$113.325 : 15 = 7.555 \Rightarrow 113.325 = 1\dot{5}$$

36.- Busca un número de tres cifras que sea múltiplo a la vez de 2, 3 y 5, pero que no los sea de 9 ni de 11.

Número  $\rightarrow abc$

$$\left. \begin{array}{l} abc = \dot{2} \Rightarrow c = 0, 2, 4, 6, 8 \\ abc = \dot{3} \Rightarrow a + b + c = \dot{3} \\ abc = \dot{5} \Rightarrow c = 0, 5 \\ abc \neq \dot{9} \Rightarrow a + b + c \neq \dot{9} \\ abc \neq \dot{11} \Rightarrow (a + c) - b \neq 0 \wedge 11 \end{array} \right\} \Rightarrow abc = 120, 150, 210, 240, 300, 390, 420, 480, 510, 570,$$

600, 690, 750, 780, 840, 870, 930, 960

37.- Busca el menor y el mayor número de tres cifras que:

a) Sea divisible por 2 y por 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} abc = \dot{2} \Rightarrow c = 0, 2, 4, 6, 8 \\ abc = \dot{3} \Rightarrow a + b + c = \dot{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{menor} \rightarrow 102 \\ \text{mayor} \rightarrow 996 \end{array}$$

b) Sea divisible por 2 y por 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} abc = \dot{2} \Rightarrow c = 0, 2, 4, 6, 8 \\ abc = \dot{5} \Rightarrow c = 0, 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{menor} \rightarrow 100 \\ \text{mayor} \rightarrow 990 \end{array}$$

c) Sea divisible por 3 y por 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} abc = \dot{3} \Rightarrow a + b + c = \dot{3} \\ abc = \dot{5} \Rightarrow c = 0, 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{menor} \rightarrow 105 \\ \text{mayor} \rightarrow 990 \end{array}$$

38.- Al multiplicar un número por 9, Carolina ha obtenido  $337.x65$ . ¿Podrías decir cuál es la cifra desconocida?

$$3 + 3 + 7 + x + 6 + 5 = \dot{9} \Rightarrow 24 + x = \dot{9} \Rightarrow x = 3$$

39.- Halla en cada caso todos los valores de  $A$  para que el número indicado cumpla la propiedad pedida.

a)  $26A$  es divisible por 4.

$$26A = \dot{4} \Rightarrow 6A = \dot{4} \Rightarrow A = 0, 4, 8$$

b)  $32A$  es divisible por 5.

$$32A = \dot{5} \Rightarrow A = 0, 5$$

c)  $A0A$  es divisible por 11.

$$32A = \dot{1}\dot{1} \Rightarrow (3+A) - 2 = 0 \Rightarrow 3 + A = 2 \Rightarrow A = \cancel{4}$$

40.- El número  $58a$  es divisible por 4. Calcula el valor de  $a$ .

$$58x = \dot{4} \Rightarrow 8x = \dot{4} \Rightarrow x = 0, 4, 8$$

41.- Halla el valor de  $x$  para que el número  $7x2$  sea divisible por 3 y por 11.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x2 = \dot{3} \Rightarrow 7+x+2 = \dot{3} \Rightarrow x+9 = \dot{3} \Rightarrow x = 0, 3, 6, 9 \\ 7x2 = \dot{1}\dot{1} \Rightarrow (7+2) - x = 0 \Rightarrow 9 - x = 0 \Rightarrow x = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 9$$

42.- Calcula el valor de  $x$  para que el número  $534x$  sea divisible por 3, pero no sea múltiplo de 9.

$$\left\{ \begin{array}{l} 534x = \dot{3} \Rightarrow 5+3+4+x = \dot{3} \Rightarrow x+12 = \dot{3} \Rightarrow x = 0, 3, 6, 9 \\ 534x \neq \dot{9} \Rightarrow 5+3+4+x \neq \dot{9} \Rightarrow x+12 \neq \dot{9} \Rightarrow x = 0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0, 3, 9$$

43.- Calcula el valor de  $x$  para que el número  $3.1x0$  sea múltiplo de 25, pero no de 100.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3.1x0 = 2\dot{5} \Rightarrow x = 0, 5 \\ 3.1x0 \neq 1\dot{0}0 \Rightarrow x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 5$$

44.- Calcula el valor de  $x$  para que el número  $4.5x4$  sea divisible por 2, pero no por 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4.5x4 = \dot{2} \Rightarrow x = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ 4.5x4 \neq \dot{4} \Rightarrow x4 \neq \dot{4} \Rightarrow x = 1, 3, 5, 7, 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1, 3, 5, 7, 9$$

45.- Calcula el valor de  $x$  para que el número  $1.52x$  sea múltiplo de 3 y de 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.52x = \dot{3} \Rightarrow 1+5+2+x = \dot{3} \Rightarrow x+8 = \dot{3} \Rightarrow x = 1, 4, 7 \\ 1.52x = \dot{4} \Rightarrow x4 = \dot{4} \Rightarrow x = 2, 4, 6, 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4$$

46.- Para obtener un número de cuatro cifras divisible por 2, ¿qué números puedes añadir a la derecha de 357?

$$3.57x = \dot{2} \Rightarrow x = 0, 2, 4, 6, 8$$

47.- ¿Qué cifras puedes añadir a la izquierda de 451 para obtener un número de cuatro cifras múltiplo de 3?

$$x \cdot 451 = \dot{3} \Rightarrow x + 4 + 5 + 1 = \dot{3} \Rightarrow x + 10 = \dot{3} \Rightarrow x = 2, 5, 8$$

48.- Sustituye la letra  $x$  por una cifra para que el número  $x05$  sea divisible por 3 y por 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} x05 = \dot{3} \Rightarrow x + 0 + 5 = \dot{3} \Rightarrow x + 5 = \dot{3} \\ x05 = \dot{5} \Rightarrow x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1, 4, 7$$

49.- Sustituye la letra  $a$  por una cifra para que el número  $7.30a$  sea:

a) Divisible por 3, pero no por 5.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7.30a = \dot{3} \Rightarrow 7 + 3 + 0 + a = \dot{3} \Rightarrow a + 10 = \dot{3} \\ 7.30a \neq \dot{5} \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2, 8 \Rightarrow 7.302 \vee 7.308$$

b) Divisible por 5, pero no por 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} 7.30a = \dot{5} \Rightarrow a = 0, 5 \\ 7.30a \neq \dot{3} \Rightarrow 7 + 3 + 0 + a \neq \dot{3} \Rightarrow a + 10 \neq \dot{3} \end{array} \right\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 7.300$$

50.- En una frutería quieren colocar 48 aguacates y 60 caquis en bandejas iguales, sin mezclar las frutas y sin que sobre ninguna. ¿Cuál es el mayor tamaño que pueden tener las bandejas?

48	2	60	2
24	2	30	2
12	2	15	3
6	2	5	5
3	3	1	
1			

$$\begin{array}{l} 48 = 2^4 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline mcd = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ frutas en cada bandeja} \end{array}$$

48 aguacates : 12 aguacates / bandeja = 4 bandejas de 12 aguacates

60 caquis : 12 caquis / bandeja = 5 bandejas de 12 caquis

51.- Tres músicos tocan sus instrumentos de una forma muy curiosa:

- El primero toca una tecla del piano cada 4 s.
- El segundo toca los platillos cada 6 s.
- El tercero toca el silbato cada 15 s.

Si tocan la primera nota a la vez, ¿cuánto tardarán en coincidir los tres?

4	2	6	2	15	3
2	2	3	3	5	5
1		1		1	

$$\begin{array}{l} 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ \hline mcm = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ s} = 1 \text{ min} \end{array}$$

52.- La profesora de Educación Física agrupa a sus alumnos de tres maneras sin que sobre ninguno: por parejas, en grupos de tres y en grupos de cuatro.

a) ¿Cuántos alumnos tiene la clase como mínimo?

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2=2 \\ 3=3 \\ 4=2^2 \\ \hline mcm=2^2 \cdot 3=4 \cdot 3=12 \text{ alumnos como mínimo} \end{array}$$

b) ¿Es posible que haya entre 20 y 30 alumnos?

$$20 < 24 = 12 \cdot 2 < 30 \Rightarrow 24 \text{ alumnos}$$

53.- Un póster gigante mide 240 cm de largo y 180 cm de alto. Para transportarlo mejor se decide cortarlo en cuadrados, que deben ser del mayor tamaño posible. Calcula la longitud que debe tener el lado de cada cuadrado y el número de cuadrados que saldrán.

$$\begin{array}{r|l} 240 & 2 \\ 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 240=2^4 \cdot 3 \cdot 5 \\ 180=2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ \hline mcd=2^2 \cdot 3 \cdot 5=4 \cdot 3 \cdot 5=60 \text{ cm de lado} \end{array}$$

$$240 \text{ cm} : 60 \text{ cm/cuadrado} = 4 \text{ cuadrados del largo}$$

$$180 \text{ cm} : 60 \text{ cm/cuadrado} = 3 \text{ cuadrados del alto}$$

$$4 \text{ cuadrados del largo} \cdot 3 \text{ cuadrados del alto} = 12 \text{ cuadrados saldrán}$$

54.- Varios amigos preparan un mosaico cuadrado, uniendo piezas de 10 cm de largo y de 12 cm de alto. No quieren romper ninguna pieza, y los colocan siempre en la misma posición, con el lado mayor en la base.

a) ¿Cuáles serían las dimensiones mínimas del mosaico cuadrado?

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 10=2 \cdot 5 \\ 12=2^2 \cdot 3 \\ \hline mcm=2^2 \cdot 3 \cdot 5=4 \cdot 3 \cdot 5=60 \text{ cm de lado} \end{array}$$

b) ¿Cuántas piezas tendrá la base? ¿Y la altura?

$$60 \text{ cm} : 10 \text{ cm/ pieza} = 6 \text{ piezas la base} \quad 60 \text{ cm} : 12 \text{ cm/ pieza} = 5 \text{ piezas la altura}$$

c) ¿Cuántas piezas habrá en total?

$$6 \text{ piezas la base} \cdot 5 \text{ piezas la altura} = 30 \text{ piezas en total}$$

55.- Inés está haciendo un solitario con cartas. Ha juntado varias barajas y ha perdido la cuenta del número de cartas que tiene. Para determinarlo, en lugar de contar todas, las ha ido adrupando en montones:

- Si las separa en cuatro montones iguales, no le sobra ninguna carta.
- Si las separa en cinco montones iguales, tampoco le sobra ninguna.
- Si hace seis montones iguales, tampoco le sobra ninguna.

a) En principio, ¿cuántas cartas, como mínimo, puede tener?

4	2	5	5	6	2	$4 = 2^2$
2	2	1		3	3	$5 = 5$
1				1		$6 = 2 \cdot 3$
						$mcm = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ cartas como mínimo}$

b) Si sabe que, por lo menos, tiene 100 cartas, ¿cuántas tendrá como mínimo?

$$100 < 120 = 60 \Rightarrow 120 \text{ cartas como mínimo}$$

56.- Un coche tarda 70 s en dar una vuelta completa a un circuito, y otro, 80 s en realizar el mismo trayecto.

a) Si salen a la vez, ¿cuánto tardarán en volver a coincidir?

70	2	80	2	$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
35	5	40	2	$80 = 2^4 \cdot 5$
7	7	20	2	$mcm = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 16 \cdot 5 \cdot 7 = 560 \text{ s en coincidir}$
1		10	2	
		5	5	
		1		

b) ¿Cuándo coincidirán por segunda vez?

$$2 \cdot 560 \text{ s} = 1.120 \text{ s en coincidir por segunda vez}$$

57.- Una parcela mide 180 m de largo por 160 m de ancho. El agricultor decide dividirla en parcelas iguales, de forma cuadrada y del máximo tamaño posible.

a) ¿Cuánto medirán los lados de cada parcela pequeña?

180	2	160	2	$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$
90	2	80	2	$160 = 2^5 \cdot 5$
45	3	40	2	$mcd = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ m de lado}$
15	3	20	2	
5	5	10	2	
1		5	5	
		1		

b) ¿Cuántas parcelas pequeñas quedarán?

$$180\text{ m} : 20\text{ m/cuadrado} = 9\text{ cuadrados el largo}$$

$$160\text{ m} : 20\text{ m/cuadrado} = 8\text{ cuadrados el ancho}$$

$$9\text{ cuadrados el largo} \cdot 8\text{ cuadrados el ancho} = 72\text{ parcelas cuadradas}$$

58.- Una empresa elabora aceites de tres calidades distintas. Del primer aceite se elaboran 4.800 l, del segundo 1.350 l y del tercero 2.646 l. Si se quiere envasar el aceite en contenedores del mismo tamaño, sin mezclar los de distinto tipo. ¿Cuál será la mayor capacidad que puede tener el contenedor?

4800	2	1350	2	2646	2	$4.800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$ $1.350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ $2.646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$ <hr style="width: 100%;"/> $mcd = 2 \cdot 3 = 60\text{ l de capacidad}$
2400	2	675	3	1323	3	
1200	2	225	3	441	3	
600	2	75	3	147	3	
300	2	25	5	49	7	
150	2	5	5	7	7	
75	3	1		1		
25	5					
5	5					
1						

59.- Tres atletas entrenan todas las semanas en la misma pista. Carmen tarda 60 s en dar una vuelta completa, Javier tarda 75 s y Rosa lo hace en 85 s.

a) Si salen los tres a la vez, ¿cada cuánto tiempo coincidirán todos?

60	2	75	3	85	5	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ $75 = 3 \cdot 5^2$ $85 = 5 \cdot 17$ <hr style="width: 100%;"/> $mcm = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 17 = 4 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 17 = 5.100\text{ s}$
30	2	25	5	17	17	
15	3	5	5	1		
5	5	1				
1						

b) ¿Cuántas vueltas a la pista habrá dado cada uno de ellos?

$$5.100\text{ s} : 60\text{ s/vuelta} = 85\text{ vueltas}$$

$$5.100\text{ s} : 75\text{ s/vuelta} = 68\text{ vueltas}$$

$$5.100\text{ s} : 85\text{ s/vuelta} = 60\text{ vueltas}$$

60.- El planeta Mercurio tarda 88 días terrestres en dar una vuelta completa alrededor del Sol y el planeta Venus lo hace en 225 días terrestres.

a) Si, en un momento dado, Mercurio y Venus están alineados con el Sol, ¿cuántos días terrestres, como mínimo, pasarán hasta que vuelvan a alinearse con el Sol?

88		2
44		2
22		2
11		11
1		1

225		3
75		3
25		5
5		5
1		1

$$88 = 2^3 \cdot 11$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$


---


$$mcm = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 = 8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 11 = 19.800 \text{ días terrestres}$$

b) Si, en un momento dado, Venus y la Tierra están alineados con el Sol, ¿dentro de cuántos días terrestres, como mínimo, volverán a estarlo?

225		3
75		3
25		5
5		5
1		1

365		5
73		73
1		1

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$365 = 5 \cdot 73$$


---


$$mcm = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 73 = 9 \cdot 25 \cdot 73 = 16.425 \text{ días terrestres}$$

c) Si, en un momento dado, Mercurio, Venus y la Tierra están alineados con el Sol, ¿cuántos días terrestres, como mínimo, pasarán hasta que vuelvan a alinearse con el Sol?

88		2
44		2
22		2
11		11
1		1

225		3
75		3
25		5
5		5
1		1

365		5
73		73
1		1

$$88 = 2^3 \cdot 11$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$365 = 5 \cdot 73$$


---


$$mcm = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 73 = 8 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 11 \cdot 73 = 1.445.400 \text{ d}$$

61.- En un terreno rectangular de 240 por 360 m se proyecta colocar placas cuadradas del mayor tamaño posible para recoger energía solar.

a) ¿Qué longitud deben tener los lados de las placas?

240		2
120		2
60		2
30		2
15		3
5		5
1		1

360		2
180		2
90		2
45		3
15		3
5		5
1		1

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$


---

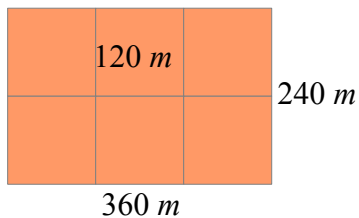

$$mcd = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \text{ m}$$

b) ¿Cuántas placas se colocarán?

$$\text{Área del terreno} = 240 \text{ m} \cdot 360 \text{ m} = 86.400 \text{ m}^2$$

$$\text{Área de la placa} = 120 \text{ m} \cdot 120 \text{ m} = 14.400 \text{ m}^2$$

$$86.400 \text{ m}^2 : 14.400 \text{ m}^2 / \text{placa} = 6 \text{ placas}$$



62.- Por una parada de autobuses pasa el autobús de la línea 1 cada 48 min; el de la línea 2, cada 36 min, y el de la línea 3, cada 60 min. Si los tres autobuses han coincidido en la parada a las 16:00 horas, ¿a qué hora volverán a coincidir?

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 48 &= 2^4 \cdot 3 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \\ 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \text{mcm} &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 720 \text{ min} \end{aligned}$$

$$720 \text{ min} : 60 \text{ min/h} = 12 \text{ h} \Rightarrow \text{A las 4:00 h coincidirán}$$

63.- Tres ciclistas tardan en dar la vuelta a un velódromo 54, 56 y 60 s, respectivamente.

a) Si salen a la vez, ¿al cabo de cuánto tiempo, como mínimo, se cruzarán los tres?

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 54 &= 2 \cdot 3^3 \\ 56 &= 2^3 \cdot 7 \\ 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \hline \text{mcm} &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 27 \cdot 5 \cdot 7 = 7.560 \text{ s} \end{aligned}$$

$$7.560 \text{ s} : 3.600 \text{ s/h} = 2,1 \text{ h} = 2 \text{ h} + 0,1 \text{ h} \cdot 60 \text{ min/h} = 2 \text{ h } 6 \text{ min para que se crucen}$$

b) ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno?

$$1^\circ \rightarrow 7.560 \text{ s} : 54 \text{ s/vuelta} = 140 \text{ vueltas}$$

$$2^\circ \rightarrow 7.560 \text{ s} : 56 \text{ s/vuelta} = 135 \text{ vueltas}$$

$$3^\circ \rightarrow 7.560 \text{ s} : 60 \text{ s/vuelta} = 126 \text{ vueltas}$$

64.- En el manual de instrucciones de un coche se especifica que debe cambiarse el aceite cada 7.500 km, el filtro del aire cada 15.000 km y las bujías cada 30.000 km. ¿A qué número de km, como mínimo, se deben hacer todos los cambios a la vez?

7.500	2	15.000	2	30.000	2	$7.500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$ $15.000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^4$ $30.000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $mcm = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^4 = 16 \cdot 3 \cdot 625 = 30.000 \text{ km}$
3.750	2	7.500	2	15.000	2	
1.875	3	3.750	2	7.500	2	
625	5	1.875	3	3.750	2	
125	5	625	5	1.875	3	
25	5	125	5	625	5	
5	5	25	5	125	5	
1		5	5	25	5	
		1		5	5	
				1		

65.- Nuria lleva los papeles al contenedor de reciclaje cada 5 días y Pedro lo hace cada 3. El día 20 de mayo se encontraron allí. ¿Cuándo volverán a coincidir?

$$\begin{array}{r}
 5 = 5 \\
 3 = 3 \\
 \hline
 mcm = 3 \cdot 5 = 15 \text{ días} \Rightarrow \text{el 4 de junio}
 \end{array}$$

66.- Rubén ha comprado flores para regalárselas a sus amigos. Puede hacer ramos de 4 flores, de 6 y 9, sin que sobre ninguna. Al hacer los ramos se da cuenta de que si hubiera comprado dos flores más, podría hacer ramos de 10 flores sin que le sobrara ninguna. ¿Cuántas flores compró?

4	2	6	2	9	3	$4 = 2^2$ $6 = 2 \cdot 3$ $9 = 3^2$ <hr style="border: 0.5px solid black;"/> $mcm = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36 \text{ flores antes de ramos}$
2	2	3	3	3	3	
1		1		1		

$$36 \cdot 1 = 36 \quad 36 \cdot 2 = 72 \quad 36 \cdot 3 = 108 = 110 - 2 = 10 - 2 \Rightarrow 108 \text{ flores}$$

67.- Los alumnos de una clase se colocan en filas. Si en cada fila hay 3 alumnos, quedan dos sin colocar. En cambio, si en cada fila se colocan 4 alumnos, solamente sobra 1.

a) ¿Cuál es el número mínimo de alumnos en esa clase?

$N^\circ$  de alumnos  $\rightarrow x$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x = 3 + 2 = 3 + 3 - 1 = 3 - 1 \\
 x = 4 + 1 = 2 + 1 = 2 + 2 - 1 = 2 - 1
 \end{array} \right\} \Rightarrow x = (3, 2) - 1$$

$$mcm(3, 2) - 1 = 6 - 1 = 5 \text{ alumnos como mínimo}$$

b) ¿Es posible encontrar más números menores que 30 que cumplan esa condición?

$$\left\{ \begin{array}{l} x=3+2 \Rightarrow 5, 8, 11, 14, \mathbf{17}, 20, 23, 26, \mathbf{29} \\ x=4+1 \Rightarrow 9, 13, \mathbf{17}, 21, 25, \mathbf{29} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=17 \\ x=29 \end{array} \right\}$$

68.- Marta tiene un número de libros comprendido entre 500 y 1.000. Está colocándolos en una estantería. Si coloca 12 en cada estante, quedan 11 libros en el último; si pone 14 en cada estante, en el último coloca 13, y cuando los ordena de 15 en 15, en el último estante coloca 14. ¿Cuántos libros tiene Marta?

$$N^{\circ} \text{ de libros} \rightarrow 500 < x < 1.000$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=12+11=12+12-1=12-1 \\ x=14+13=14+14-1=14-1 \\ x=15+14=15+15-1=15-1 \end{array} \right\} \Rightarrow x=(12, 14, 15)-1$$

12	2	14	2	15	3	
6	2	7	7	5	5	$12=2^2 \cdot 3$
3	3	1		1		$14=2 \cdot 7$
1						$15=3 \cdot 5$
						$mcm=2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7=420$

$$500 < x < 1.000 \Rightarrow x=2 \cdot 420 - 1 = 839 \text{ libros}$$

$$\text{Comprobación: } 839 : 12 = 69 / r = 11 \quad 839 : 14 = 59 / r = 13 \quad 839 : 15 = 55 / r = 14$$

69.- Colocando fotos en un álbum comprobamos que si colocamos 4 en cada página, solo quedan 3 para la última página. Lo mismo ocurre si colocamos 5 ó 6 fotos en cada página.

a) ¿Cuántas fotos, como mínimo, tenemos?

$$\text{Fotos} \rightarrow x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=4+3 \\ x=5+3 \\ x=6+3 \end{array} \right\} \Rightarrow x=mcm(4,5,6)+3$$

$$\begin{array}{l} 4=2^2 \\ 5=5 \\ 6=2 \cdot 3 \\ \hline mcm=2^2 \cdot 3 \cdot 5=4 \cdot 3 \cdot 5=60 \end{array}$$

$$x=60+3=63 \text{ fotos}$$

$$\text{Comprobación: } 63 : 4 = 15 / r = 3 \quad 63 : 5 = 12 / r = 3 \quad 63 : 6 = 10 / r = 3$$

b) ¿Cuántas debe colocar en cada página para que todas tengan el mismo número y no sobre ninguna?

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$N^{\circ} \text{ div} = (2+1) \cdot (1+1) = 3 \cdot 2 = 6$$

		$3^0$	$3^1$	$3^2$
	x	1	3	9
$7^0$	1	1	3	9
$7^1$	7	7	21	63

$$\text{Div} \{63\} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\} \text{ fotos en cada página}$$

70.- El número de alumnos de primer ciclo de un instituto puede contarse de 3 en 3, de 4 en 4 y de 5 en 5.

Si el número de alumnos matriculados en primer ciclo supera las 2 centenas, ¿cuántos alumnos hay?

**1** Aplicando los criterios de divisibilidad

Número de alumnos supera las 2 centenas  $\Rightarrow 2ab$

$$2ab = \left\{ \begin{array}{l} \dot{3} \Rightarrow 2+a+b=\dot{3} \\ \dot{4} \Rightarrow a b = 00 \vee a b = \dot{4} \\ \vec{5} \Rightarrow b=0 \vee b=5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2ab = 240$$

**2** Mínimo común múltiplo

$$N^{\circ} \text{ de alumnos} = n \cdot \text{mcm}(3, 4, 5) = n \cdot (2^2 \cdot 3 \cdot 5) = n \cdot (4 \cdot 3 \cdot 5) = n \cdot 60 = 4 \cdot 60 = 240$$

71.- Una banda de música está formada por 40 personas. Durante las fiestas del pueblo van a desfilar por las calles, de forma que en todas las filas haya el mismo número de músicos. ¿De cuántas formas distintas podrán desfilar?

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

$$N^{\circ} \text{ div} \{40\} = (3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$5^0$	1	1	2	4	8
$5^1$	5	5	10	20	40

Opciones:

$1 \cdot 40, 2 \cdot 20, 4 \cdot 10, 5 \cdot 8$   
 $40 \cdot 1, 20 \cdot 2, 4 \cdot 10, 8 \cdot 5$

72.- Está previsto que asistan 120 personas a una fiesta. ¿De cuántos comensales pueden ser las mesas si todas han de ser iguales y estar completas?

*Comensales* → 120 personas

*Comensales por mesas iguales y completas* →  $Div(120)$

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$N^{\circ} div(120) = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

		$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$
	x	1	2	4	8
$3^0$	1	1	2	4	8
$3^1$	3	3	6	12	24

	x	1	2	3	4	6	8	12	24
$5^0$	1	1	2	3	4	6	8	12	24
$5^1$	5	5	10	15	20	30	40	60	120

$Div(120) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$  comensales por mesa

73.- Alex ha calculado los divisores de 58 y 84:

58: 1, 2, 29, 58

84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

¿Alguna de estas tres afirmaciones es falsa?

a) Cuanto mayor es el número, más divisores tiene.

*Falso:*

*Por ejemplo; hay números primos infinitamente grandes y solo tienen dos divisores.*

b) 58 tiene tres divisores primos y 84 tiene cuatro.

*Falso:*

58: 1, 2, 29, 58 → dos divisores primos

84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 → tres divisores primos

c) 58 y 84 solo tienen dos divisores comunes.

*Verdadero:*

58: 1, 2, 29, 58

84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84

74.- Escribe dos números cuyo *mcm* sea 210. ¿Puedes encontrar más de una solución?

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

$$y = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$mcm = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

$$x = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

$$y = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

$$mcm = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

*Puedo encontrar más de una solución.*

75.- Escribe dos números cuyo *mcm* sea 210 y que estén entre 10.000 y 10.100.

$$10.000 : 210 = 47,6 \quad 10.100 : 210 = 48,1$$

$$210 \cdot 47 = 9.870 < 10.000$$

$$210 \cdot 48 = 10.080 \text{ es el único número entre 10.000 y 10.100 cuyo mcm es 210}$$

$$210 \cdot 49 = 10.290 > 10.100$$

76.- La descomposición en factores primos de un número  $n$  es  $2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ . Encuentra, en cada caso, otro número de forma que cumpla la condición pedida:

a)  $mcd = 10$

$$n = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$mcd = 2 \cdot 5 = 10$$

$$b) mcm = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$\begin{aligned} n &= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ x &= 2^4 \cdot 7^2 = 16 \cdot 49 = \mathbf{784} \\ mcd &= 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \end{aligned}$$

$$c) mcd = 1$$

$$\begin{aligned} n &= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ x &= 3 = \mathbf{3} \\ mcd &= 1 \end{aligned}$$

$$d) mcm = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\begin{aligned} n &= 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ x &= 2^4 \cdot 7 = 16 \cdot 7 = \mathbf{112} \\ mcd &= 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

77.- Determina los valores de las letras  $x, y, z$  y  $n$  para que  $mcm(a, b, c) = 1.200$  .

$$a = 2^x \cdot 5^2$$

$$b = 2^3 \cdot 3^y \cdot 5$$

$$c = 2^z \cdot n^2$$

¿Cuál es su máximo común divisor?

$$\begin{array}{r|l} 1200 & 2 \\ 600 & 2 \\ 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1.200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \Rightarrow x=4, y=1, z=1, 2, 3 \text{ y } n=5$$

$$mcd = 2$$

78.- Determina los valores de las letras  $x$  e  $y$  para que  $mcm(a, b) = 4.200$  .

$$a = 2^x \cdot 3 \cdot 5$$

$$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^y \cdot 7$$

4.200	2
2.100	2
1.050	2
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$$4.200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \Rightarrow x=3 \wedge y=2$$

79.- ¿Hay algún número capicúa entre 200 y 300 que sea primo? ¿Y entre 500 y 600? Encuentra un número primo capicúa entre 100 y 200.

$200 < 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292 < 300 \rightarrow$  ninguno es número primo

$500 < 505, 515, 525, 535, 545, 555, 565, 575, 585, 595 < 600 \rightarrow$  ninguno es número primo

$100 < 101 < 200 \rightarrow 101$  es número primo

80.- Si dos números distintos son primos, ¿son también primos entre sí? ¿Por qué?

$a$  y  $b$ , números primos  $\Rightarrow$  único divisor común = 1  $\Rightarrow a$  y  $b$ , números primos entre sí

81.- ¿La suma de dos números primos es siempre un número primo? ¿Y su diferencia?

$\left. \begin{array}{l} 5, \text{ número primo} \\ 11, \text{ número primo} \\ 5+11=16, \text{ número compuesto} \end{array} \right\} \Rightarrow$  la suma de dos números primos no es siempre un número primo

$\left. \begin{array}{l} 5, \text{ número primo} \\ 11, \text{ número primo} \\ 11-5=6, \text{ número compuesto} \end{array} \right\} \Rightarrow$  la diferencia entre dos números primos no es siempre un número primo

82.- Dos números tienen un divisor común, el 8.

a) ¿Su suma es múltiplo de 8?

$$8|x \Rightarrow x = 8n \quad 8|y \Rightarrow y = 8m$$

$$x + y = 8n + 8m = 8(m+n) \Rightarrow x + y = 8$$

b) ¿Su diferencia es múltiplo de 8?

$$8|x \Rightarrow x = 8n \quad 8|y \Rightarrow y = 8m$$

$$x - y = 8n - 8m = 8(m-n) \Rightarrow x - y = 8$$

c) ¿Podemos asegurar que su suma es siempre múltiplo de 16?. Si no es así, encuentra los dos primeros números que cumplen esta condición.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8 = \dot{8} \\ 16 = \dot{8} \\ 8 + 16 = 24 \neq \dot{16} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no podemos asegurar que su suma sea siempre múltiplo de 16}$$

$$[\dot{8}] = \{0, 8, 16, 24, 32, 48, \dots\}$$

$$[\dot{16}] = \{0, 16, 32, 48, 64, 80, \dots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 16 = \dot{8} \\ 32 = \dot{8} \end{array} \right\} \rightarrow 16 + 32 = 48 = \dot{16}$$

83.- Estudia qué números puedes añadir a la derecha de 235 para obtener uno de cuatro cifras que cumpla, en cada caso, la condición pedida.

a) Que sea múltiplo de 4.

$$235x = \dot{4} \Rightarrow 5x = \dot{4} \Rightarrow x = 2, 6$$

b) Que sea divisible entre 6.

$$235x = \dot{6} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 235x = \dot{2} \Rightarrow x = 0, 2, 4, 6, 8 \\ 235x = \dot{3} \Rightarrow 2 + 3 + 5 + x = \dot{3} \Rightarrow 10 + x = \dot{3} \Rightarrow x = 2, 5, 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2, 8$$

c) Que sea múltiplo 11.

$$235x = \dot{11} \Rightarrow (2 + 5) - (3 + x) = 0 \Rightarrow 7 = 3 + x \Rightarrow x = 4$$

84.- Cuando dividimos 26 entre un número natural  $n$ , el resto es 2. ¿Cuáles son los posibles valores de  $n$ ?

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Resto} = 2 \Rightarrow \text{División entera} \Rightarrow n \nmid 26 \\ n + 2 = 26 \Rightarrow n = 24 \Leftrightarrow n | 24 \end{array} \right\} \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

85.- Recuerda la igualdad  $mcd(a, b) \cdot mcm(a, b) = a \cdot b$  y calcula el término desconocido en los siguientes casos:

a)  $mcd(a, 30) = 6$      $mcm(a, 30) = 90$      $b = 30$

$$mcd(a, 30) \cdot mcm(a, 30) = a \cdot 30 \Rightarrow 6 \cdot 90 = a \cdot 30 \Rightarrow 540 = a \cdot 30 \Rightarrow a = 18$$

b)  $mcd(50, 80) = 10$      $a = 50$      $b = 80$

$$mcd(50, 80) \cdot mcm(50, 80) = 50 \cdot 80 \Rightarrow 10 \cdot mcm(50, 80) = 4.000 \Rightarrow mcm(50, 80) = 400$$

c)  $mcd(40, b) = 20$      $mcm(40, b) = 360$      $a = 40$

$$mcd(40, b) \cdot mcm(40, b) = 40 \cdot b \Rightarrow 20 \cdot 360 = 40 \cdot b \Rightarrow 7.200 = 40 \cdot b \Rightarrow b = 180$$

$$d) \text{mcm}(60,72)=360 \quad a=60 \quad b=72$$

$$\text{mcd}(60,70) \cdot \text{mcm}(60,70) = 60 \cdot 72 \Rightarrow \text{mcd}(60,70) \cdot 360 = 4.320 \Rightarrow \text{mcd}(60,70) = 12$$

86.- Un número se llama *perfecto* cuando es igual a la suma de todos sus divisores excluido él mismo. Comprueba si 6, 28 y 42 son números perfectos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(6) = \{1, 2, 3, 6\} \\ 1 + 2 + 3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow 6, \text{ número perfecto}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \\ 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow 28, \text{ número perfecto}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(42) = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\} \\ 1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 14 + 21 = 54 \neq 42 \end{array} \right\} \Rightarrow 42, \text{ número no perfecto}$$

87.- Dos números son *amigos* si cada uno es igual a la suma de los divisores del otro excluido él mismo.

a) Comprueba que 220 y 284 son números *amigos*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(220) = \{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220\} \\ 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \end{array} \right\} \Rightarrow 220 \text{ y } 284, \text{ números amigos}$$

b) Comprueba si 84 y 48 son números *amigos*.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Div}(84) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\} \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 12 + 14 + 21 + 28 + 42 = 140 \neq 48 \end{array} \right\} \Rightarrow 84 \text{ y } 48, \text{ no son números amigos}$$



Ejercicios resueltos: *Divisibilidad* by [Damián Gómez Sarmiento](#) is licensed under a [Creative Commons Reconocimiento-CompartirIgual 4.0 Internacional License](#)