5.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO COMPLETA

Ejemplo

Si al doble del cuadrado de un número le restamos ocho veces ese mismo número y le sumamos seis, el resultado es cero. ¿De qué número se trata?

$Número \rightarrow x$

$2x^2-8x+6=0 \rightarrow Ecuación\ de\ segundo\ grado\ con\ una\ incógnita$

Forma general

$ax^2+bx+c=0$

- $ax^2 \rightarrow Término\ cuadrático$
- $bx \rightarrow Término\ lineal$
- $c \rightarrow Término\ independiente$

Ejemplo

$ax^2=2x^2 \rightarrow Término\ cuadrático \Rightarrow a=2 \rightarrow Coeficiente\ principal$

$bx=-8x \rightarrow Término\ lineal \Rightarrow b=-8$

$c=6 \rightarrow Término\ independiente$

Resolución

Ejemplo	Forma general
$2x^2-8x+6=0$	$ax^2+bx+c=0$
1.- Dividimos por 2 , miembro a miembro: $\frac{2x^2-8x+6}{2}=\frac{0}{2}$ $\frac{2x^2}{2}-\frac{8x}{2}+\frac{6}{2}=0$ $x^2-4x+3=0$	1.- Dividimos por a , miembro a miembro: $\frac{ax^2+bx+c}{a}=\frac{0}{a}$ $\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$ $x^2+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$
2.- Transponemos 3 : $x^2-4x=0-3$ $x^2-4x=-3$	2.- Transponemos c/a : $x^2+\frac{bx}{a}=0-\frac{c}{a}$ $x^2+\frac{bx}{a}=-\frac{c}{a}$

3.- Sumamos, $(-8/2\cdot 2)^2$, a ambos miembros: $x^2-4x+\left(\frac{-8}{2\cdot 2}\right)^2=-3+\left(\frac{-8}{2\cdot 2}\right)^2$ $x^2-4x+\left(\frac{-8}{4}\right)^2=-3+\left(\frac{-8}{4}\right)^2$ $x^2-4x+(-2)^2=-3+(-2)^2$ $x^2-4x+4=-3+4$ $x^2-4x+4=1$	3.- Sumamos, $(b/2a)^2$, a ambos miembros: $x^2+\frac{bx}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$
4.- Identificamos x^2-4x+4 con $(x-2)^2$: $(x-2)^2=1$	4.- Identificamos $x^2+bx/a+(b/2a)^2$ con $(x+b/2a)^2$: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\overset{4a}{-4ac}}{4a^2}+\frac{\overset{1}{b^2}}{4a^2}$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$
5.- Sacamos raíz cuadrada a ambos miembros: $\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{1}$ $x-2=\sqrt{1}$	5.- Sacamos raíz cuadrada a ambos miembros: $\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}}$ $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{\sqrt{4a^2}}$ $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$
6.- Despejamos la incógnita: $x=2\pm\sqrt{1}$ $x=2\pm 1$ $x=\left\{\begin{matrix}2+1=3\\2-1=1\end{matrix}\right\}\rightarrow Soluciones\ o\ raíces$	6.- Despejamos la incógnita: $x=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}$

Fórmula general

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\longrightarrow\quad b^2-4ac\rightarrow Discriminante$$

$$Discriminante\rightarrow\left\{\begin{matrix}b^2-4ac>0\Rightarrow Dos\ soluciones\\ b^2-4ac=0\Rightarrow Solución\ doble\\ b^2-4ac<0\Rightarrow Sin\ soluciones\Rightarrow Ecuación\ incompatible\end{matrix}\right\}$$

Resolución, utilizando la fórmula general

$$2x^2-8x+6=0 \Rightarrow a=2 \quad b=-8 \quad c=6$$

$$\textit{Discriminante} \rightarrow 16>0 \Rightarrow \textit{Dos soluciones}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot2\cdot6}}{2\cdot2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{4}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{4}=\frac{8\pm4}{4}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\frac{8+4}{4}=\frac{12}{4}=3\\ \frac{8-4}{4}=\frac{4}{4}=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow \textit{Soluciones} \rightarrow \left\{\begin{matrix}x_1=3\\ x_2=1\end{matrix}\right\}$$

Comprobación

1 **Sustituyendo** la incógnita por las soluciones obtenidas.

$$\left\{\begin{matrix}2x^2-8x+6=2\cdot3^2-8\cdot3+6=2\cdot9-8\cdot3+6=18-24+6=24-24=0\\ x_1=3\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix}2x^2-8x+6=2\cdot1^2-8\cdot1+6=2\cdot1-8\cdot1+6=2-8+6=8-8=0\\ x_2=1\end{matrix}\right\}$$

2 A partir de las soluciones, o **raíces**, podemos reconstruir la ecuación.

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \Rightarrow ax^2+bx+c=0$$

Ejemplo

$$(x-3)(x-1)=0 \Rightarrow x^2-x-3x+3=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$$2x^2-8x+6=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-8x+6}{2}=\frac{0}{2} \Rightarrow \frac{2x^2}{2}-\frac{8x}{2}+\frac{6}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$$

Calculadora:
Qalculate!
Functions *Algebra* *Solve equation*
Equation: 2 *x* ^ 2 - 8 *x* + 6 = 0
With respect to: *x*
Execute

WIRIS
Resolver ecuación

2 *x* □□ 2 - 8 *x* + 6 = 0

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS
<u>Del tipo</u> $\rightarrow$ $ax^2+c=0$

$$\left\{\begin{matrix} ax^2+bx+c=0 \\ b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax^2+c=0$$

<u>Ejemplo</u>
$2x^2-32=0 \Rightarrow a=2 \quad b=0 \quad c=-32$

1 Con la fórmula general.

$Dos\ soluciones$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 2\cdot(-32)}}{2\cdot 2}=\frac{0\pm\sqrt{0+256}}{4}=\frac{0\pm\sqrt{256}}{4}=\frac{0\pm 16}{4}=$$
$$=\left\{\begin{matrix} \frac{0+16}{4}=\frac{16}{4}=4 \\ \frac{0-16}{4}=\frac{-16}{4}=-4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Soluciones \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{matrix}\right\}$$

2 En la práctica.

$$\begin{aligned} 2x^2-32&=0 \\ 2x^2&=0+32 \\ 2x^2&=32 \\ x^2&=\frac{32}{2} \\ x^2&=16 \\ \sqrt{x^2}&=\sqrt{16} \\ x&=\pm 4 \Rightarrow Soluciones \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

<u>Comprobación</u>
1 **Sustituyendo** la incógnita por las soluciones obtenidas.

$$\left\{\begin{matrix} 2x^2-32=2\cdot 4^2-32=2\cdot 16-32=32-32=0 \\ x_1=4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 2x^2-32=2\cdot(-4)^2-32=2\cdot 16-32=32-32=0 \\ x_2=-4 \end{matrix}\right\}$$

2 A partir de las soluciones, o **raíces**, podemos reconstruir la ecuación.

$$(x-4)(x+4)=0 \Rightarrow x^2+4x-4x-16=0 \Rightarrow x^2-16=0$$
$$2x^2-32=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-32}{2}=\frac{0}{2} \Rightarrow \frac{2x^2}{2}-\frac{32}{2}=0 \Leftrightarrow x^2-16=0$$

Del tipo → $ax^2+bx=0$

$$\left.\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ c=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow ax^2+bx=0$$

Ejemplo

$3x^2-12x=0 \Rightarrow a=3 \quad b=-12 \quad c=0$

1 Con la fórmula general.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 3\cdot 0}}{2\cdot 3}=\frac{12\pm\sqrt{144+0}}{6}=\frac{12\pm\sqrt{144}}{6}=\frac{12\pm 12}{6}=$$

Dos soluciones

$$=\left\{\begin{matrix} \dfrac{12+12}{6}=\dfrac{24}{6}=4 \\ \dfrac{12-12}{6}=\dfrac{0}{6}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Soluciones \rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=0 \end{matrix}\right\}$$

2 En la práctica.

$$3x^2-12x=0$$

$$x(3x-12)=0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \\ 3x-12=0 \Rightarrow 3x=0+12 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=\dfrac{12}{3} \Rightarrow x=4 \end{matrix}\right\}$$

Comprobación

1 **Sustituyendo** la incógnita por las soluciones obtenidas.

$$\left\{\begin{matrix} 3x^2-12x=3\cdot 4^2-12\cdot 4=3\cdot 16-48=48-48=0 \\ x_1=4 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} 3x^2-12x=3\cdot 0^2-12\cdot 0=3\cdot 0-0=0-0=0 \\ x_2=0 \end{matrix}\right\}$$

2 A partir de las soluciones, o **raíces**, podemos reconstruir la ecuación.

$$(x-4)(x-0)=0 \Rightarrow x^2-4x=0$$

$$3x^2-12x=0 \Leftrightarrow \frac{3x^2-12x}{3}=\frac{0}{3} \Rightarrow \frac{3x^2}{3}-\frac{12x}{3}=0 \Leftrightarrow x^2-4x=0$$

Del tipo → $ax^2=0$

$$\left.\begin{cases} ax^2+bx+c=0 \\ b=0 \quad c=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow ax^2=0$$

Ejemplo

$3x^2=0 \Rightarrow a=3 \quad b=0 \quad c=0$

1 Con la fórmula general.

Solución doble

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot3\cdot0}}{2\cdot3}=\frac{0\pm\sqrt{0-0}}{6}=\frac{0\pm\sqrt{0}}{6}=\frac{0\pm0}{6}=$$
$$=\left\{\begin{matrix}\frac{0+0}{6}=\frac{0}{6}=0\\ \frac{0-0}{6}=\frac{0}{6}=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow Soluciones\rightarrow x_1=x_2=0$$

2 En la práctica.

$$\begin{aligned}3x^2&=0\\ x^2&=\frac{0}{3}\\ x^2&=0\\ \sqrt{x^2}&=\sqrt{0}\\ x&=0\Rightarrow Soluciones\rightarrow x_1=x_2=0\end{aligned}$$

Comprobación

1 **Sustituyendo** la incógnita por las soluciones obtenidas.

$$\left\{\begin{matrix}3x^2=3\cdot0^2=3\cdot0=0\\ x_1=x_2=0\end{matrix}\right\}$$

2 A partir de las soluciones, o **raíces**, podemos reconstruir la ecuación.

$$(x-0)(x-0)=0\Rightarrow x^2=0$$
$$3x^2=0\Leftrightarrow\frac{3x^2}{3}=\frac{0}{3}\Rightarrow x^2=0$$

Ejercicio propuesto 13, 14, 15, 16, 17, 18 → Ejercicio resuelto 13, 14, 15, 16, 17, 18

Enlace interactivo: *Ecuaciones de segundo grado incompletas 1 – 8*

Enlace interactivo: *Ecuaciones de segundo grado completas 1 – 9*

De *Álgebra con papas. JOSÉ ANTONIO ORTEGA*